Ecole des Hautes Etudes Commerciales 1983

Mathématiques III

OPTION ECONOMIQUE

PREMIER EXERCICE

ATTENTION : *la présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

On considère deux verres A et B de volume unité, pleins à ras bord, le premier d'eau, le second d'alcool pur. On dispose en outre d'un flacon F pour faire les mélanges.

I. a) On verse dans F, d'une part le volume $\frac{1}{n}$ du contenu de A (où n est un entier naturel non nul), d'autre part tout le contenu du verre B. Après mélange, on remplit B avec le contenu de F. L'excédent de liquide resté dans F, de volume $\frac{1}{n}$, est jeté.

Quel est le volume $q_n(1)$ d'alcool se trouvant dans le verre B à l'issue de cette opération (a) ?

b) On répète k fois l'opération (a) $(k \leq n)$, en tirant de A à chaque fois un volume $\frac{1}{n}$.

Quel est le volume $q_n(k)$ d'alcool se trouvant dans le verre B à l'issue de la k-ième opération (a) ?

c) On pose $q_n = q_n(n)$. Montrer que la suite (q_n) admet une limite q.

d) Calculer à la précision de 10^{-3} de combien q est inférieur à $q_1(1)$.

.../...

Par commodité de langage, on parlera dans la suite de "versement goutte à goutte d'un verre sur un autre" (goutte $\frac{1}{n}$ aussi petite qu'on le veut) pour désigner à la limite le processus décrit en I. Ainsi le versement goutte à goutte du verre d'eau A sur le verre d'alcool B produit dans B le mélange des volumes $1-q$ d'eau et q d'alcool, comme il a été calculé ci-dessus. (On se tiendra à l'écart de toute discussion relative à la physique des liquides).

II. a) Le verre A est plein d'eau, le verre B plein du mélange des volumes p_o d'eau et q_o d'alcool ($p_o + q_o = 1$).

Quel est l'effet du versement goutte à goutte de A sur B ?

b) Le verre A est plein d'alcool, le verre B plein du mélange des volumes p_o d'eau et q_o d'alcool.

Quel est l'effet du versement goutte à goutte de A sur B ?

c) Sur le verre B dans l'état initial (p_o, q_o) on verse goutte à goutte un verre d'eau, puis un verre d'alcool.

Exprimer le volume p_1 d'eau obtenu dans B, en fonction de p_o.
On note f la fonction ainsi définie $f : p_o \mapsto p_1$. Tracer dans un repère orthonormé les représentations graphiques des fonctions f, et $I : p_o \mapsto p_o$.

d) Que devient le mélange du verre B si on itère la double opération du versement goutte à goutte sur B d'un verre d'eau et d'un verre d'alcool ?

DEUXIEME EXERCICE

ATTENTION : *La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

Soit k un nombre réel.

On considère la suite réelle (u_n) définie par la donnée de ses premiers termes :

$$u_0 = 2k \ , \quad u_1 = 1 + k \ ,$$

et la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + (k^2 - \tfrac{1}{4})\, u_n \ .$$

I. Calculer u_n en fonction de n, suivant les valeurs de k.

II. Déterminer la limite, lorsqu'elle existe, de u_n quand n tend vers $+\infty$. Ici encore on discutera suivant les valeurs de k.

TROISIEME EXERCICE

ATTENTION : *la présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

Soient n un entier naturel non nul et f une fonction numérique n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée n-ième est continue. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une suite strictement croissante de nombres réels. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_0)(X - a_1)\ldots(X - a_n).$$

Pour tout entier naturel k tel que $k \leqslant n$, on note A_k le polynôme défini par

$$A_k(X) = \frac{P(X)}{X - a_k} \ .$$

.../...

1. Exprimer $A_k(a_k)$ à l'aide de la dérivée de P.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \frac{A_k(x)}{A_k(a_k)}.$$

a) Calculer les nombres $g(a_0)$, $g(a_1)$, ..., $g(a_n)$.

b) Montrer qu'il existe un élément λ de $]a_0, a_n[$ tel que :

$$f^{(n)}(\lambda) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k)}{A_k(a_k)}.$$

c) Montrer qu'il existe un élément x_1 de $]a_0, \lambda[$ et un élément x_2 de $]\lambda, a_n[$ tels que :

$$f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(x_1) = (x_2 - x_1) f^{(n)}(\lambda).$$

3. On considère le cas particulier suivant :

$$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right),$$

$n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

a) Expliciter g.

b) Calculer $\frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}\lambda\right)$.

QUATRIEME EXERCICE

ATTENTION : *la présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que ces variables suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p :

$P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$.

On construit la suite $(Y_n, n \geq 1)$ de variables aléatoires de la façon suivante :

$Y_1 = X_1$, $Y_2 = Y_1 X_2$, ... , $Y_n = Y_{n-1} X_n$, ... ; Y_n est la variable aléatoire produit des variables Y_{n-1} et X_n.

On suppose que pour tout entier $n \geq 2$ les variables aléatoires Y_{n-1} et X_n sont indépendantes.

1) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_n.

2) Trouver, pour tout $n \geq 1$, la loi de probabilité conjointe de la variable aléatoire à deux dimensions (X_n, Y_n). Calculer la covariance de X_n et Y_n.

3) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, les lois de probabilité conditionnelles de X_n sachant que Y_n prend la valeur 0, et de X_n sachant que Y_n prend la valeur 1.

4) La suite des variables aléatoires $(Y_n, n \geq 1)$ converge-t-elle en probabilité quand n tend vers l'infini ? Si oui, vers quelle limite ?

FIN